Integracija racionalnih funkcij, $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$; $p, q \in \mathbb{R}[x]$

(1) Če je $\operatorname{st} p \geq \operatorname{st} q$, delimo $p : q$ in prevedemo na integral vsote polinoma in racionalne funkcije, katere števec je manjše stopnje kot imenovalec.

(2) Polinom q razcepimo do linearnih in kvadratnih nerazcepnih faktorjev

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{e_1} \cdots (x-\alpha_m)^{e_m}(x^2+a_1x+b_1)^{f_1} \cdots (x^2+a_nx+b_n)^{f_n}$$

α_i so realne ničle q, za kvadratne faktorje pa je $a_i^2 - 4b_i < 0$. Pri tem smo privzeli, da je vodilni koeficient polinoma q enak 1 (sicer ga izpostavimo pred znak integrala).

(3) Nastavek za rešitev je oblike

$$\frac{r(x)}{s(x)} + \sum_{i=1}^{m} A_i \ln|x-\alpha_i| + \sum_{j=1}^{n} B_j \ln|x^2+a_jx+b_j| + \sum_{k=1}^{n} C_k \operatorname{arctg} \frac{2x+a_k}{\sqrt{a_k^2-4b_k}} + D$$

Polinom s ima potence pri nerazcepnih faktorjih za ena manjše kot polinom q. Polinom r ima za vsaj ena manjšo stopnjo kot s. Iščemo konstante A_i, B_j, C_k. Pri tem se včasih splača upoštevati dejstvo, da je integral lihe funkcije soda funkcija in integral sode funkcije liha funkcija + konstanta.

(4) Obe strani odvajamo in iz sistema linearnih enačb dobimo iskane koeficiente.

Integrali nekaterih iracionalnih funkcij

Naj R pomeni racionalno funkcijo z argumentom x.

(1) $\int R(x, \sqrt[n]{x})\,dx$: substitucija $t^n = x$

(2) $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$: substitucija $t^n = ax+b$

(3) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$: substitucija $t^n = \dfrac{ax+b}{cx+d}$

(4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$: s popolnimi kvadrati se znebimo linearnega člena bx

- če $a < 0$, prevedemo na integral $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$
- če $a > 0$, prevedemo na integral $\displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln|t + \sqrt{t^2+1}| + C$

(5) $\displaystyle\int \frac{p(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \int \frac{D\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

Pri tem sta p in q polinoma, $\operatorname{st} q < \operatorname{st} p$ in D konstanta.

(6) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$: substitucija $u = \dfrac{1}{x-\alpha}$

(7) $\displaystyle\int \frac{p(x)\,dx}{q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, kjer ima q le realne ničle: s pomočjo razcepa $\frac{p(x)}{q(x)}$ na parcialne ulomke prevedemo na prejšnji primer.

(8) $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$: "racionaliziramo" koren

Integracija trigonometričnih funkcij

(1) $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$: univerzalna substitucija

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

(2) Če nastopata sin in cos v sodih potencah, se da integral rešiti s substitucijo $t = \operatorname{tg} x$ ali s prehodom na dvojne kote.

(3) $\int p(x) \sin x\, dx$: s pomočjo per partes znižamo stopnjo p.

(4) $\int R(x) \sin x\, dx$: racionalno funkcijo razcepimo na parcialne ulomke. Integral ni nujno elementarna funkcija.

(5) $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$

- Če je $m = 2k+1 > 0$ (oz. $n = 2l+1 > 0$), substitucija $u = \cos x$ (oz. $u = \sin x$).
- Če sta m in n soda in pozitivna, gremo na dvojne kote:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\,.$$

- Če $m, n < 0$, $m + n \leq -2$, substitucija $u = \operatorname{tg} x$.

Integracija eksponentnih in logaritemskih funkcij

(1) $\int R(e^x)\, dx$: substitucija $t = e^x$

(2) $\int p(x) e^x\, dx$: per partes $u = p(x)$

(3) $\int R(x) e^x\, dx$: razcep R na parcialne ulomke, rezultat ni nujno elementarna funkcija

(4) $\int R(\ln x)\, dx$: substitucija $x = e^t$

(5) $\int f(x) \ln x\, dx$: če znamo izračunati primitivno funkcijo f, gremo per partes $u = \ln x$, $dv = f(x)\, dx$.