

1. Rešujemo enačbo

$$x - \sqrt{1+x} = 0.$$

- (a) Izračunaj vse njene ničle!
- (b) Kakšen mora biti začetni interval za bisekcijo ali regulo falsi?
- (c) Ali navadna iteracija $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$ konvergira proti rešitvi, če izberemo x_0 dovolj blizu rešitve?
- (d) Za katere vrednosti c navadna iteracija

$$x_{n+1} = x_n - c(x_n^2 - x_n - 1)$$

konvergira proti rešitvi, če je x_0 dovolj blizu rešitve?

2. Rešujemo sistem linearnih enačb $Ax = b$, kjer za matriko $A = (a_{ij})$ velja, da je $a_{ij} = 0$ za $i - j > 1$.

- (a) Zapiši eno tako matriko reda 5.
- (b) Algoritem za Gaussovo eliminacijo priredi za reševanje takega sistema.
- (c) Preštej potrebne operacije (deljenja in množenja)!

3. Računamo vrednost integrala

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Vrednost integrala lahko izračunamo z *enostavno sredinsko formulo*

$$\int_c^{c+h} f(x) dx \approx h f\left(c + \frac{h}{2}\right).$$

- (a) Zapiši *sestavljeno sredinsko formulo* za izračun vrednosti I pri dolžini koraka $h = \frac{b-a}{4}$
- (b) Kolikšna je napaka enostavne sredinske formule?
- (c) Izračunaj vrednost integrala $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ s sestavljeno sredinsko formulo pri dolžini koraka $h = 0.25$.
- (d) Za primerjavo izračunaj vrednost istega integrala še s sestavljeno trapezno formulo pri isti dolžini koraka in primerjaj obe napaki.

4. Rešujemo sistem linearnih enačb

$$\begin{aligned}x_1/3 + x_2/4 &= 1 \\x_1/4 + x_2/5 &= 1.\end{aligned}$$

- (a) Poišči točno rešitev sistema (računaj z ulomki).
- (b) Reši sistem tako, da računaš le z dvema decimalnima mestoma.
- (c) Ostanek izračunaj natančno (z ulomki). Rešitev popravi z eno iteracijo iterativnega izboljšanja. Kolikšen je ostanek sedaj?
- (d) *Dodatek:* Izračunaj število občutljivosti sistema (v max normi).

5. Funkcija $\sin x$ je tabelirana na intervalu $[0, 1.6]$.

- (a) Kolikšna je maksimalna napaka kvadratne interpolacije, če je korak tabele enak $h = 0.01$?
- (b) Kolikšen naj bo korak tabele, da bo napaka kvadratne interpolacije pod 10^{-4} ?
- (c) Napiši algoritem, ki iz tabeliranih vrednosti izračuna kubični interpolacijski polinom.
- (d) Kolikšna mora biti stopnja interpolacijskega polinoma, da bo napaka pod 10^{-6} , če je korak tabele 0.02?

6. Naj bo funkcija f definirana na intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{12x}{\pi} - 2 & \text{za } \frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{4} \\ \frac{-12x}{\pi} + 4 & \text{za } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{3} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Rešujemo enačbo $f(x) = \sin x$.

- (a) Skiciraj graf. Koliko rešitev ima enačba?
- (b) Zapiši algoritem za izračun najmanjše ničle z Newtonovo metodo. Izračunaj to ničlo.
- (c) Kako bi največjo ničlo izračunal s splošno iteracijo (metodo fiksne točke)? Zapiši algoritem in izračunaj to ničlo.

7. Rešujemo začetni problem

$$y'' + 102y' + 200y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

- (a) Poišči točno rešitev tega problema.
- (b) Zapiši algoritem za reševanje tega problema z Adams-Bashforth-Moultonovo metodo prediktor-korektor tretjega reda.
- (c) Reši začetni problem z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.2$. Komentiraj dobljeni rezultat!
- (d) *Dodatek:* Točna rešitev začetnega problema $y' = -100y; y(0) = 1$ je padajoča funkcija. Za kakšne velikosti koraka h bo tudi numerična rešitev, izračunana z Eulerjevo metodo, padajoča?

8. Naj bo polinom

$$p(x) = (x + 2)(x - 7) = x^2 - 5x - 14 \quad (1)$$

in $f(x) = p(x) - 0.02x^2$.

- (a) Z Newtonovo metodo izračunaj največjo ničlo polinoma f . Kakšna je relativna sprememba glede na polinom p ?
- (b) Z metodo regula falsi izračunaj najmanjšo ničlo polinoma f . Kakšna je relativna sprememba glede na polinom p ?
- (c) Za vsako od obeh ničel določi iteracijsko funkcijo za metodo fiksne točke.

9. Z integracijsko formulo

$$\int_0^h f(x) dx \approx \frac{h}{4}(3f(h/3) + f(h))$$

želimo izračunati vrednost integrala

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{1+x^2}.$$

- (a) Izračunaj red te integracijske formule. Kolikšna je njena napaka?
- (b) Zapiši algoritem za izračun določenega integrala $\int_a^b f(x) dx$ s sestavljenim integracijskim pravilom na osnovi te formule.
- (c) Vrednost zgornjega integrala izračunaj pri delitvi integracijskega intervala na 1, 2 in 5 podintervalov. Kolikšna je napaka vsakega od približkov?
- (d) Primerjaj to integracijsko pravilo s trapeznim in Simpsonovim!

10. Naj bo A taka realna matrika reda $n \times n$, da se naslednji algoritem izteče:

```

for  $j = n : -1 : 2$ 
  for  $i = j - 1 : -1 : 1$ 
     $p = A(i, j) / A(j, j)$ ;
     $A(i, 1 : j - 1) = A(i, 1, j - 1) - p * A(j, 1 : j - 1)$ ;
     $A(i, j) = 0$ ;
  end
end

```

(a) Kako se spremeni matrika

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 5 & 9 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix},$$

ko izvedemo zgornji algoritem?

- (b) Preštej število deljenj in množenj v zgornjem algoritmu (pri dimenziji matrike $n \times n$).
- (c) Kako bi z zgornjim algoritmom izračunal determinanto matrike?
- (d) Dopolni zgornji algoritem za reševanje sistema enačb $Ax = b$.

11. Zveza med količinama t in x je dana z enačbo

$$x = a \cdot e^{bt}.$$

Z merjenjem smo dobili naslednje podatke

t	100	125	150	175
x	9238	1724	323	63

- (a) V zgornji enačbi je x nelinearno odvisen od parametra b . Z zamenjavo spremenljivke doseži, da bo odvisnost od parametrov linearna.
 - (b) Izračunaj vrednosti parametrov a in b z metodo najmanjših kvadratov.
 - (c) Kateri vrednosti količine t ustreza vrednost $x = 5000$? Katera vrednost količine x ustreza vrednosti $t = 133$?
12. (a) Zapiši ekonomičen algoritem za izračun matrike $A^{-1}B$, kjer je A kvadratna matrika reda n in B matrika reda $n \times m$.

- (b) Preštej število množenj, potrebnih za izračun matrike $A^{-1}B$. Koliko množenj je potrebnih, če najprej izračunaš inverzno matriko A^{-1} in jo pomnožiš z B ?
- (c) Zapiši ekonomičen algoritem za izračun matrike $CA^{-1}B$, kjer je C matrika reda $i \times n$ (uporabi algoritem iz točke 12a).

13. S formulo

$$y_{n+1} = y_n + h(\theta f(x_n, y_n) + (1 - \theta)f(x_{n+1}, y_{n+1})),$$

kjer je $\theta \in [0, 1]$, je dana *theta metoda* za reševanje začetnih problemov

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

- (a) Izračunaj red theta metode! (Namig: Obe strani približne enakosti $y_{n+1} \approx y(x_n + h)$ razvij po Taylorjevi formuli in primerjaj člene na obeh straneh.) Pri kateri vrednosti za θ dobimo najvišji red? Le kje sem to že videl?
- (b) Theta metoda je eksplicitna le za $\theta = 1$, sicer pa je implicitna. Zapiši algoritem za metodo prediktor-korektor, pri kateri vzameš za prediktor theta metodo za $\theta = 1$, za korektor pa theta metodo najvišjega reda iz točke 13a.
- (c) Z metodo iz točke 13b reši začetni problem

$$y' = -y + 2e^{-t} \cos 2t, \quad y(0) = 0,$$

na intervalu $[0, 2]$ s korakom $h = 1/2$.

- (d) *Dodatek:* Poišči točno rešitev začetnega problema iz točke 13c in jo primerjaj z izračunano rešitvijo.

14. Enačba $x^3 - 5x + 1 = 0$ ima tri realne korene.

- (a) Najprej s pomočjo bisekcije določi približne vrednosti vseh treh korenov.
- (b) Negativni koren izračunaj s pomočjo fiksne iteracije.
- (c) Največji koren izračunaj z Newtonovo metodo.
- (d) Srednji koren izračunaj s sekantno metodo.

Končne vrednosti naj bodo točne vsaj na tri decimalke.

15. Izračunati želimo vrednost dvojnega integrala

$$I = \iint_S \frac{dx dy}{(x+y)^2},$$

kjer je območje S določeno z neenačbama $3 \leq x \leq 4$ in $1 \leq y \leq 2$.

(a) Z dvakratno uporabo Simpsonove formule

$$\int_0^{2h} f(x) dx \approx h(f(0) + 4f(h) + f(2h))/6$$

zapiši formulo za približno vrednost dvojnega integrala

$$\int_0^{2h} \int_0^{2h} f(x, y) dx dy.$$

- (b) S pomočjo te formule izračunaj približno vrednost integrala I pri koraku $h = 1/2$.
- (c) Dvojni integral zapiši kot dvakratni integral. Izračunaj točno vrednost integrala in jo primerjaj z numerično.
- (d) Dodatek: Kako bi izgledalo dvojno Simpsonovo pravilo za izračun tega integrala pri $h = 1/4$? Kaj ustreza običajnemu zaporedju uteži (14242...241) iz enojnega Simpsonovega pravila?