

1. Nelinearno enačbo $f(x) = 0$ rešujemo z metodo trisekcije. To je varianta metode bisekcije, pri kateri interval $[a, b]$, na katerem leži ničla, vsakič razdelimo na tri enake podintervale.
 - (a) Zapiši algoritem za metodo trisekcije za primer, ko je na intervalu $[a, b]$ natanko ena ničla funkcije f .
 - (b) Koliko je največje potrebno število korakov, če želimo izračunati približek, ki se od prave vrednosti razlikuje manj kot ε_x ?
 - (c) Primerjaj bisekcijo in trisekcijo glede na število izračunov vrednosti funkcije f .
 - (d) Metodo trisekcije uporabi pri reševanju enačbe $2x - 3 = 0$ z začetnim intervalom $[-1.2, 10/3]$ in natančnostjo $\varepsilon_x = 0.1$.
2. Rešujemo začetni problem

$$y' = 2\frac{y}{x} + \frac{3}{x^2}, \quad y(1) = 0.$$

- (a) Poišči točno rešitev začetnega problema.
 - (b) Z Eulerjevo metodo izračunaj približno rešitev na intervalu $[1, 2]$ z dolžino koraka $h = 0.5$. Kolikšni sta lokalna in globalna napaka pri $x = 2$?
 - (c) Izračunaj približno rešitev še z metodo Runge-Kutta. Kolikšni sta lokalna in globalna napaka pri $x = 2$ v tem primeru?
3. Funkcijo f , dano v obliki tabele

x	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
$f(x)$	0.5000	0.7143	1.0000	1.4000	2.0000

želimo aproksimirati s funkcijo oblike $p(x) = a + be^x$.

- (a) Zapiši normalni sistem enačb za neznan koeficienta a in b .
 - (b) Zapiši algoritem, ki izračuna a in b
 - (c) Izračunaj a in b .
4. V sistemu linearnih enačb $Ax = b$ je kvadratna matrika $A = [a_{ij}]$ takšna, da je $a_{ij} = 0$ kadarkoli je $i - j \geq 2$.
 - (a) Algoritem za LU -razcep priredi za reševanje takega sistema.
 - (b) Preštej potrebne operacije (deljenja in množenja)!

(c) Reši sistem

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \\ 49 \\ 36 \end{bmatrix}.$$

(d) Vektor $[1, 2, 3.5, 4.5]$ je le priblišek za rešitev zgornjega sistema. Popravi ga z enim korakom iterativnega izboljšanja.

5. Iz tabele naravnih logaritmov dobimo naslednje vrednosti

x	$\log x$
1.0	0.0000
1.5	0.4055
2.0	0.6931
3.0	1.0986
3.5	1.2528
4.0	1.3863

(a) Sestavi tabelo deljenih diferenc.

(b) Izračunaj približni vrednosti za $\log 2.5$ in $\log 1.75$ s pomočjo kubične interpolacije.

(c) Oцени napako približkov iz prejšnje točke in primerjaj s točnimi vrednostmi.

6. Računamo vrednost integrala $\int_0^1 f(x) dx$, kjer je

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

(a) Izračunaj njegovo vrednost s trapezno formulo s $h = 1$, $h = 1/2$ in $h = 1/4$.

(b) Vrednosti, izračunane s trapezno formulo uporabi za izračun vrednosti integrala z Rombergovo metodo.

(c) Izračunaj vrednost integrala s Simpsonovo metodo s $h = 1/2$ in $h = 1/4$.

(d) *Dodatek:* Komentiraj dobljene rezultate.

7. Rešujemo sistem linearnih enačb $Ax = b$, kjer je matrika A enaka

$$\begin{bmatrix} 1 & c \\ c & 1 \end{bmatrix}, \quad c \neq 1.$$

- Izračunaj število občutljivosti za matriko A .
 - V katerem primeru je matrika A izrazito občutljiva?
 - Reši sistem $Ax = b$ za $b = [1, 2]^T$ ter za $c = 0, 0.9$ in 0.99 . Računaj na tri decimalna mesta. Kaj lahko poveš o rešitvah?
8. Začetni problem $y' = \frac{y}{x} + x$, $y(1) = 0$, rešujemo z linearno večlensko metodo

$$y_{n+1} = 3y_n - 2y_{n-1} + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) - 3f(x_{n-1}, y_{n-1})).$$

- Poišči točno rešitev začetnega problema.
 - Izračunaj red metode.
 - Z metodo Runge-Kutta drugega reda izračunaj približek za $y(1.1)$.
 - Z dano metodo s korakom $h = 0.1$ izračunaj rešitev na intervalu $[1, 2]$.
 - Dodatek:* Na osnovi primerjave numeričnih približkov in točne rešitve oceni, ali je to metodo priporočljivo uporabljati.
9. Funkcija f je znana v naslednjih točkah:

x	-1	-0.75	-0.5	0
$f(x)$	0.3679	0.5698	0.7788	1

- Poišči Newtonov interpolacijski polinom, ki interpolira funkcijo v danih točkah.
- S pomočjo interpolacijskega polinoma oceni maksimum funkcije na $[-1, 1]$ na naslednji način: najprej z metodo fiksne točke poišči ničlo odvoda polinoma, nato oceni maksimum kot vrednost funkcije v tej točki. Zagotovi, da bo navadna iteracija zagotovo konvergirala.
- Izračunaj napako pri oceni maksimuma, če veš, da je $f(x) = \exp(-x^2)$.

10. Rešujemo začetni problem

$$\begin{aligned}y' &= -5y + 4z + 1 & , & & y(0) &= -0.4, \\z' &= 5y - 6z & , & & z(0) &= -0.5.\end{aligned}$$

- (a) Reši ga z Eulerjevo metodo s korakom $h = 0.5$ na intervalu $[0, 1]$.
- (b) Na istem intervalu ga reši še s korakom $h = 0.1$.
- (c) Primerjaj obe rešitvi, če veš, da je točna rešitev tega problema $y(x) = 0.6 - e^{-x}$; $z(x) = 0.5 - e^{-x}$. Razloži razliko med obema približnima rešitvama!

11. Naj bo A kvadratna matrika reda $n \times n$, za katero velja

$$a_{ij} = \begin{cases} a; & \text{za } |i - j| = 1, \\ b; & \text{za } i = j, \\ 0; & \text{sicer,} \end{cases}$$

pri čemer je $2|a| < |b|$.

- (a) Zapiši algoritem, ki za poljubno naravno število n reši sistem

$$A \mathbf{x} = \mathbf{c},$$

kjer je \mathbf{c} znan vektor.

- (b) Preštej število potrebnih operacij (množenj in deljenj).
- (c) Kakšna lastnost matrike A sledi iz pogoja $2|a| < |b|$ in kako jo lahko uporabimo pri pisanju algoritma?

12. Vrednost integrala $I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$ želimo izračunati s pomočjo kvadraturne formule

$$\int_0^h f(x) = A \cdot f(0) + B \cdot f(c) + R, \quad 0 \leq c \leq h.$$

- (a) Določi uteži A in B in vozle c tako, da bo formula imela čim višji red.
- (b) Izračunaj konstanto napake C zgornje formule, če je njena napaka $R = Ch^{p+1} f^{(p)}(\xi)$, kjer je p red formule in $\xi \in [0, h]$.
- (c) Izračunaj vrednost integrala I s korakom $h = 0.25$.
- (d) *Dodatek:* Primerjaj natančnost te formule z natančnostjo trapezne formule pri istem koraku.

13. Sistem linearnih enačb je podan v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} U & 0 \\ A & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix},$$

kjer sta matriki L in U dobljeni z LU razcepom matrike A brez pivotairanja.

- a) Sestavi učinkovit algoritem za reševanje tega sistema.
- b) Preštej število potrebnih operacij (množenj in deljenj).
- c) Koliko operacij je potrebnih, če $A \neq LU$?

14. Dana je naslednja tabela funkcijskih vrednosti

x_j	0	1	2	3
f_j	2	5	16	41

- a) Določi polinom p v Lagrangeovi obliki, ki interpolira podatke iz tabele.
- b) Numerično preveri enakosti

$$\sum_{i=0}^3 l_i(x_j) x_i^k = x_j^k, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

kjer so l_i Lagrangeovi polinomi, x_i pa točke iz tabele.

- c) Napiši algoritem, ki za dane točke x_i , $i = 0, 1, 2, 3$ in dani polinom $p(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, izračuna koeficiente α_i , $i = 0, 1, 2, 3$, tako, da velja

$$p(x) = \sum_{i=0}^3 \alpha_i l_i(x).$$

Nasvet: Pomagaj si s točko b).